电子科技大学

University of Electronic Science and Technology of China

信息論基礎

－微分熵和高斯信道

鄺育軍

通信與信息工程學院

kyj@uestc.edu.cn, www.mobilelink.uestc.edu.cn

13648007026, 61830597

移動互聯實驗室

MOBILELINK

内容提要

- 一、时不变连续信源及其微分熵
- 二、时不变连续信道及信道容量
- 三、高斯信道及信道容量
- 小结

一、时不变连续信源及其微分熵

1、时不变连续信源

定义

- 如果任何时刻信源发出的消息都是单一符号，而这些符号的取值是连续的，该信源为时不变连续信源。

表示

- 信源符号X取值于集合[a , b]

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ p(x) \end{Bmatrix}$$

- 式中，p(x)为连续消息的概率密度函数，满足

$$\int_a^b p(x)dx = 1$$

例

1

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ 1/(b-a) \end{Bmatrix}$$

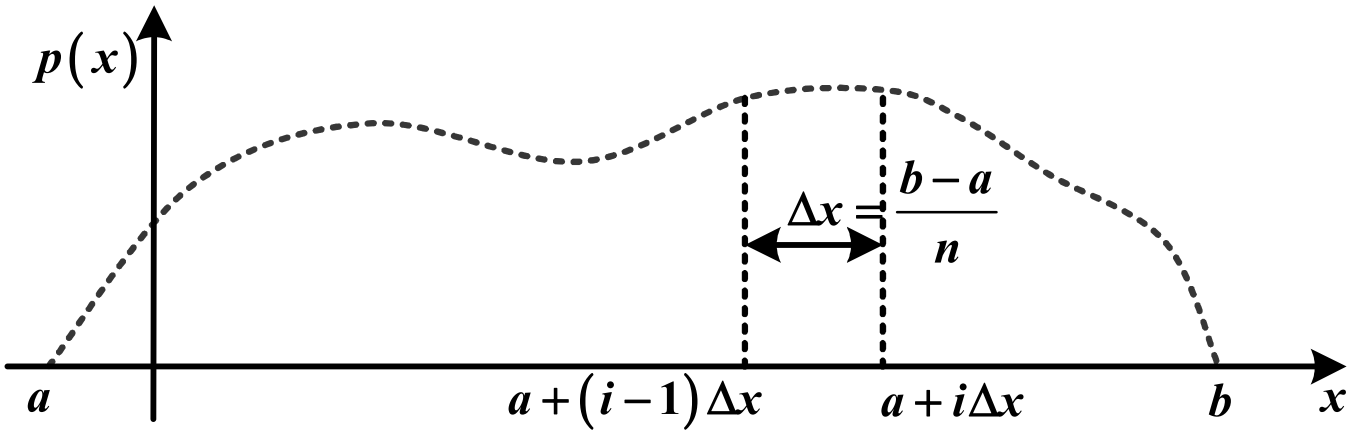
2

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\infty < x < \infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \end{Bmatrix}$$

一、时不变连续信源及其微分熵—续

➢ 2、时不变连续信源的微分熵

– 假定概率密度函数p(x)如图所示



– 连续消息落在第i个区域的概率

$$P\left[a+(i-1)\Delta x \le x < a+i\Delta x\right]=\int_{a+(i-1)\Delta x}^{a+i\Delta x} p(x)dx$$

– 根据中值定理可得 $\int_{a+(i-1)\Delta x}^{a+i\Delta x} p(x)dx = p(x_i)\Delta x$，进而可以计算熵和微分熵。

一、时不变连续信源及其微分熵—续

– ①熵

$$H(X)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\left\{-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta x\mathrm{lb}\left[p(x_i)\Delta x\right]\right\}$$

$$=-\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta x\mathrm{lb}p(x_i)$$

$$-\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta x\mathrm{lb}\Delta x$$

$$=-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}p(x)dx$$

$$-\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\mathrm{lb}\Delta x\int_a^b p(x)dx$$

$$=-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}p(x)dx-\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\mathrm{lb}\Delta x$$

$$\to\infty$$

– ②微分熵

表示 $$h(X)=-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}p(x)dx$$

– 微分熵不能作为连续信源的信息度量。
– 定义微分熵的目的：
  - ***熵差具有信息度量的意义***
  - ***与离散信源的熵在形式上统一***

一、时不变连续信源及其微分熵—续

3、几种时不变连续信源的微分熵

– ①均匀分布信源的微分熵

$$p(x)=\frac{1}{b-a},a\le x\le b$$

$$h(X)=-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}p(x)dx=-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}\frac{1}{b-a}dx=\mathrm{lb}(b-a)$$

– ②高斯分布信源的微分熵

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty \quad \begin{cases} m=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \\ \sigma^2=E\left[(x-m)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 p(x)dx \end{cases}$$

$$h(X)=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{lb}p(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{lb}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right]dx$$

$$=\mathrm{lb}\sqrt{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx+\mathrm{lb}e\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}dx=\mathrm{lb}\sqrt{2\pi\sigma^2}+\frac{1}{2}\mathrm{lb}e=\frac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi e\sigma^2\right)$$

一、时不变连续信源及其微分熵一续

– ③指数分布信源的微分熵

$$p(x)=\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}} \quad ,0\le x<\infty$$

$$m=E[X]=\int_0^\infty xp(x)dx$$

$$\sigma^2=\int_0^\infty (x-m)^2 p(x)dx$$

$$=\int_0^\infty x^2 p(x)dx-\left[\int_0^\infty xp(x)dx\right]^2$$

$$=m$$

$$h(X)=-\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}p(x)dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}\left(\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}\right)dx$$

$$=\mathrm{lb}m\int_0^\infty p(x)dx+\mathrm{lbe}\int_0^\infty p(x)\frac{x}{m}dx$$

$$=\mathrm{lb}m+\mathrm{lbe}=\mathrm{lb}(em)$$

- 4、微分熵的主要性质
  - ①不具有非负性
    - *例如，当b-a<1时，均匀分布信源的微分熵*

$$h(X)=\mathrm{lb}(b-a)<0$$

  - ② 严格上凸性

$$-\int_a^b \begin{bmatrix}\alpha p_1(x)+\\(1-\alpha)p_2(x)\end{bmatrix}\mathrm{lb}\begin{bmatrix}\alpha p_1(x)+\\(1-\alpha)p_2(x)\end{bmatrix}dx$$

$$>-\alpha\int_a^b \begin{matrix}p_1(x)\mathrm{lb}p_1(x)-\\(1-\alpha)\int_a^b p_2(x)\mathrm{lb}p_2(x)dx\end{matrix}$$

一、时不变连续信源及其微分熵—续

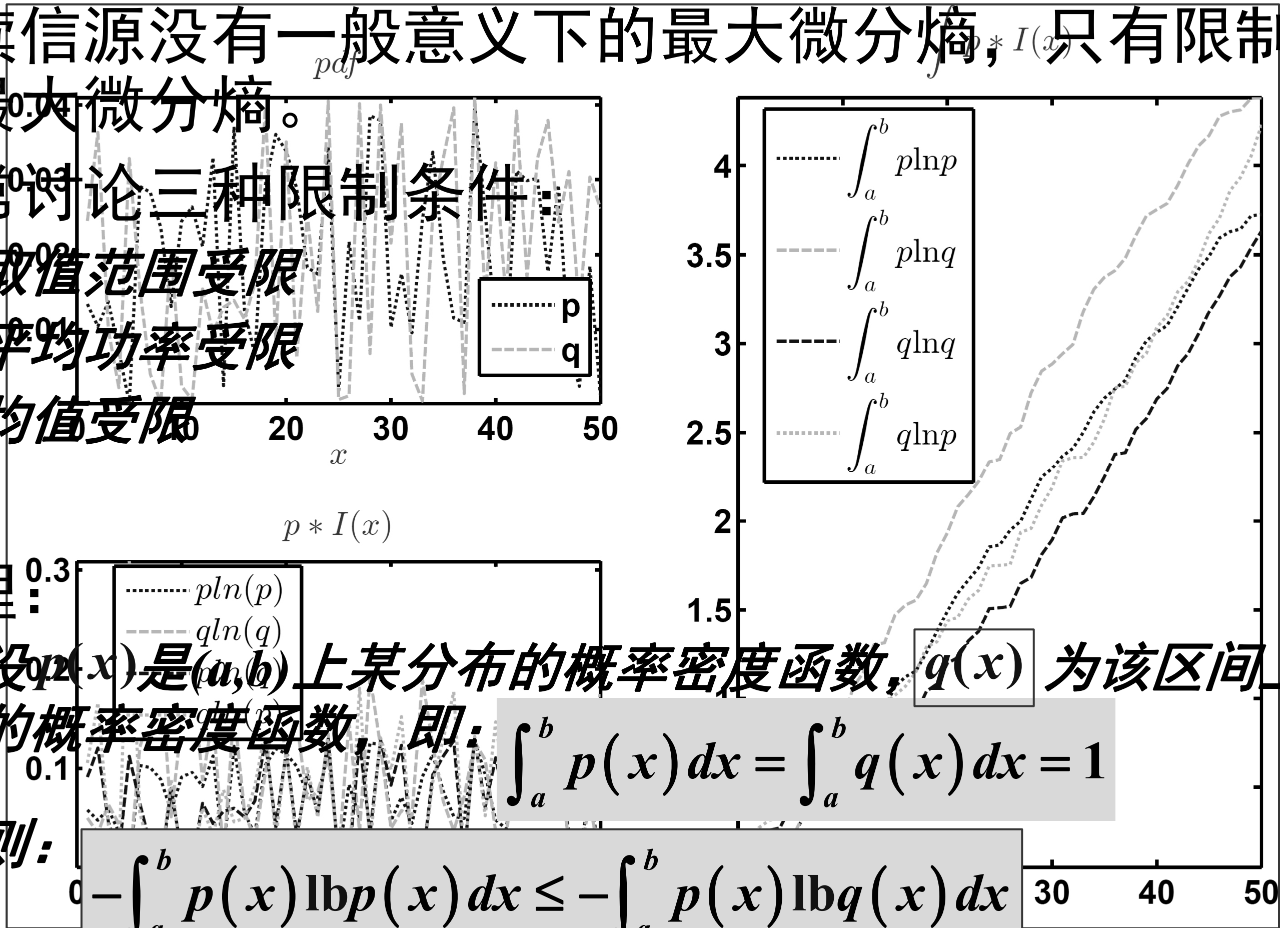
➢5、最大微分熵定理

- 连续信源没有一般意义下的最大微分熵，只有限制条件下的最大微分熵。
- 通常讨论三种限制条件：
  - ➢ ***取值范围受限***
  - ➢ ***平均功率受限***
  - ➢ ***均值受限***
- 引理：
  - ➢ ***设*** $p(x)$ ***是*** (a,b) ***上某分布的概率密度函数，*** $q(x)$ ***为该区间上另一分布的概率密度函数，即：*** $\int_a^b p(x)dx=\int_a^b q(x)dx=1$

    则：

$$-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}p(x)dx\le-\int_a^b p(x)\mathrm{lb}q(x)dx$$

$$-\int_a^b q(x)\mathrm{lb}q(x)dx\le-\int_a^b q(x)\mathrm{lb}p(x)dx$$



一、时不变连续信源及其微分熵—续

– ①取值范围受限下的最大微分熵定理

➢ ***如果连续消息取值范围被限定在[a,b]，该限定域内的均匀分布信源具有最大微分熵，该最大微分熵***

$$h_{\max}(X) \le \mathrm{lb}(b-a),\ a \le x \le b$$

➢ ***设p(x)是限定域[a,b]内的任何概率密度函数，则***

$$\begin{aligned}
h(x) &= -\int_a^b p(x)\,\mathrm{lb}\,p(x)\,dx = -\int_a^b p(x)\,\mathrm{lb}\left[p(x)(b-a)/(b-a)\right]dx \\
&= -\int_a^b p(x)\,\mathrm{lb}\left[1/(b-a)\right]dx - \underline{\int_a^b p(x)\,\mathrm{lb}\left[p(x)(b-a)\right]dx} \\
&\le \mathrm{lb}(b-a) - \mathrm{lb}e\int_a^b p(x)\left[1-1/\left[p(x)(b-a)\right]\right]dx \\
&= \mathrm{lb}(b-a) + \mathrm{lb}e\left[\int_a^b \left[1/(b-a)\right]dx - \int_a^b p(x)dx\right] \\
&= \mathrm{lb}(b-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b p(x)\,\mathrm{lb}\left[p(x)(b-a)\right]dx \\
&= \int_a^b p(x)\,\mathrm{lb}\frac{1}{p(x)(b-a)}dx \xrightarrow{\ln x < 1-x} \\
&\le \int_a^b p(x)\left[\frac{1}{p(x)(b-a)}-1\right]dx \\
&= -\int_a^b p(x)\left[1-\frac{1}{p(x)(b-a)}\right]dx
\end{aligned}$$

一、时不变连续信源及其微分熵—续

– ②平均功率受限下的最大微分熵定理

➢ ***如果连续消息的平均功率被限定为P，均值为零、方差为该平均功率的高斯分布信源具有最大微分熵，该最大微分熵***

$$h_{\max}(X) \le \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi e\sigma^2\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi eP\right),\ -\infty < x < \infty$$

➢ ***设p(x)是任何概率密度函数，且*** $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = P$ ***，则***

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}p(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}\left[p(x)\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)/\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}\left[\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)/\sqrt{2\pi\sigma^2}\right]dx + \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)/p(x)\right]dx$$

$$\le \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi e\sigma^2\right) + \mathrm{lbe}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)/\left[\sqrt{2\pi\sigma^2}p(x)\right]-1\right]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi e\sigma^2\right) + \mathrm{lbe}\left[\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)/\sqrt{2\pi\sigma^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi e\sigma^2\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}\left(2\pi eP\right)$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{lb}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)/p(x)\right]dx}$$

$$= \mathrm{lbe}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ln\left[\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}p(x)}\right]dx \xrightarrow{\ln x < 1-x}$$

$$\le \mathrm{lbe}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}p(x)}-1\right]dx$$

$$= \mathrm{lbe}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx - \int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx\right]$$

一、时不变连续信源及其微分熵—续

– ③均值受限下的最大微分熵定理

- ***如果非负连续消息的均值被限定为m，均值为该限定值的指数分布信源具有最大微分熵，该最大微分熵***

$$h_{\max}(X) \le \mathrm{lb}(em),\ 0 \le x < \infty$$

- ***设p(x)是非负域的任何概率密度函数，且*** $\int_0^\infty xp(x)dx = m$ ***，则***

$$h(X) = -\int_0^\infty p(x)\mathrm{lb}p(x)dx = -\int_0^\infty p(x)\mathrm{lb}\left[p(x)\tfrac{m}{m}\exp\left(-\tfrac{x}{m}\right)/\exp\left(-\tfrac{x}{m}\right)\right]dx$$
$$= -\int_0^\infty p(x)\mathrm{lb}\left[\exp\left(-\tfrac{x}{m}\right)/m\right]dx + \int_0^\infty p(x)\mathrm{lb}\left[\exp\left(-\tfrac{x}{m}\right)/\left[p(x)m\right]\right]dx$$
$$\le \mathrm{lb}(em) + \mathrm{lb}e\int_0^\infty p(x)\left[\exp\left(-\tfrac{x}{m}\right)/\left[p(x)m\right]-1\right]dx$$
$$= \mathrm{lb}(em) + \mathrm{lb}e\left[\int_0^\infty \tfrac{1}{m}\exp\left(-\tfrac{x}{m}\right)dx - \int_0^\infty p(x)dx\right] = \mathrm{lb}(em)$$

二、时不变连续信道及信道容量

➢1、时不变连续信道

定义

– 对应于时不变连续信源和时不变连续信宿的信道为时不变连续信道。

表示

– 信源符号X取值于集合[a , b]

– 信宿符号Y取值于集合[c , d]

$$X \longrightarrow \boxed{p(y/x)} \longrightarrow Y$$

– $p(y/x)$为信道转移概率密度函数，满足$\int_c^d p\left(y/x\right)dy=1$

二、时不变连续信道及信道容量－续

➢2、时不变连续信道的噪声熵

– ①噪声熵

$$H(Y/X)=\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \Delta x,\Delta y\to 0}}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p(x_i y_j)\Delta x\Delta y\,\mathrm{lb}\left[p(y_j/x_i)\Delta y\right]\right\}$$

$$=-\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \Delta x,\Delta y\to 0}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p(x_i y_j)\Delta x\Delta y\,\mathrm{lb}\,p(y_j/x_i)$$

$$-\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \Delta x,\Delta y\to 0}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p(x_i y_j)\Delta x\Delta y\,\mathrm{lb}\Delta y$$

$$=-\int_c^d\int_a^b p(xy)\,\mathrm{lb}\,p(y/x)dxdy-\lim_{\substack{m\to\infty\\ \Delta y\to 0}}\mathrm{lb}\Delta y\int_c^d\int_a^b p(xy)dxdy$$

$$=-\int_c^d\int_a^b p(xy)\,\mathrm{lb}\,p(y/x)dxdy-\lim_{\substack{m\to\infty\\ \Delta y\to 0}}\mathrm{lb}\Delta y\to\infty$$

– ②噪声微分熵

$$h(Y/X)=-\int_c^d\int_a^b p(xy)\,\mathrm{lb}\,p(y/x)dxdy$$

二、时不变连续信道及信道容量一续

- 关于均值和方差是否存在的说法补充
  - 该结论出自《概率论与数理统计(第二版)》高等教育出版社
- 柯西分布的数学期望和方差均不存在。
  - 首先pdf不对：$Cauchy\ f(x,\alpha,\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+(x-\alpha)^2}\xrightarrow{\text{应为}}f(x,\alpha,\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\alpha)^2}$
  - 其次，其均值貌似应该与α有关，但是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{x\lambda}{\lambda^2+(x-\alpha)^2}dx\xrightarrow[x=t+\alpha]{t=x-\alpha}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t+\alpha)\lambda}{\pi(\lambda^2+t^2)}dt=\lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to 0}}\int_B^A\frac{\lambda dx}{\pi x}+\alpha:\text{不可积}$$

具体而言：

- ***对连续型随机变量来说，数学期望的定义是这样的：***
  设X是一个连续型随机变量，f(x)是其概率密度，若xf(x)在负无穷到正无穷上的广义积分是绝对收敛的，则称此积分值为随机变量X的数学期望，记为E(X).
- ***既然均值不存在，方差也不存在***

二、时不变连续信道及信道容量一续

➢3、平均互信息

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y/X) \\
&= h(Y) - \lim_{\substack{m\to\infty \\ \Delta y\to 0}} \mathrm{lb}\Delta y - h(Y/X) + \lim_{\substack{m\to\infty \\ \Delta y\to 0}} \mathrm{lb}\Delta y \\
&= h(Y) - h(Y/X)
\end{aligned}
$$

– 虽然微分熵不能作为信息度量，但平均互信息是熵差，具有信息度量的意义。

二、时不变连续信道及信道容量－续

- 4、平均互信息的主要性质
  - ① 非负性 $I(X;Y)\ge 0$
    - *证明：*

$$
\begin{aligned}
&h(Y/X)-h(Y)\\
&=-\int_c^d\int_a^b p(xy)\mathrm{lb}p(y/x)dxdy+\underline{\int_c^d p(y)\mathrm{lb}p(y)dy}\\
&=\int_c^d\int_a^b p(xy)\mathrm{lb}\left[p(y)/p(y/x)\right]dxdy\\
&\le \mathrm{lb}e\int_c^d\int_a^b p(xy)\left[p(y)/p(y/x)-1\right]dxdy\\
&=\mathrm{lb}e\left[\int_c^d p(y)dy\int_a^b p(x)dx-\int_c^d\int_a^b p(xy)dxdy\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{aligned}&I(X;Y)\\&=h(Y)-h(Y/X)\\&\ge 0\end{aligned}
$$

  - ② 对称性

$$I(X;Y)=I(Y;X)$$

  - ③ 严格凸函数性
    - *信道固定时，I(X;Y)是信源概率密度函数p(x)的严格上凸函数*
    - *信源固定时，I(X;Y)是信道转移概率密度函数p(y/x)的严格下凸函数*

$$
\begin{aligned}
&\int_c^d p(y)\mathrm{lb}p(y)dy\\
&=\int_c^d\left[p(y)\mathrm{lb}p(y)\int_a^b p(y|x)dx\right]dy\\
&=\int_c^d\int_a^b p(xy)\mathrm{lb}p(y)dxdy
\end{aligned}
$$

二、时不变连续信道及信道容量－续

➢5、信道容量与最大信息传输速率

– 信道固定时，平均互信息量是信源概率密度函数p(x)的严格上凸函数，总能找到一种信源概率密度函数p(x)，使通过信道的平均互信息量达到最大。

定义 – 信道转移概率密度函数p(y/x)不变时平均互信息量的最大值为该信道的信道容量，用C表示。

表示

$$C=\max_{p(x)} I(X;Y)$$

– 连续信道一般考虑信道在单位时间内平均互信息量的最大值。

定义 – 单位时间的信道容量为最大信息传输速率，用C_t表示。

表示

$$C_t=\frac{C}{T}=\frac{1}{T}\max_{p(x)} I(X;Y)$$

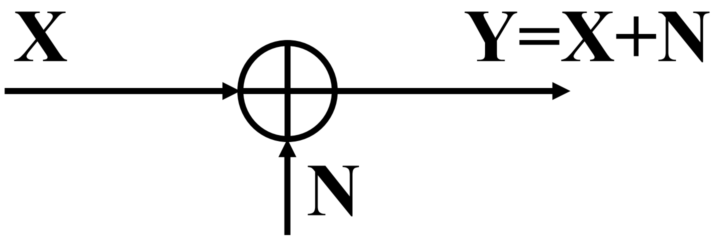
➢ ***其中T为平均传输一条消息所需的时间***

➢ ***最大信息传输速率的单位为bit/sec(bps)***

三、高斯信道及信道容量

➢1、高斯信道

– 信道中噪声对信号的作用表现为线性叠加的称为加性噪声，相应的信道为加性信道。



➢ ***其中，X的概率密度函数为p(x)，Y的概率密度函数为p(y)，噪声N的概率密度函数为p(n)。***

– X和N相互独立时，加性信道的转移概率密度函数为

➢ ***p(y/x)=p(n)???***

三、高斯信道及信道容量一续

➢1、高斯信道一续

– 设坐标变换

$$x = f_1 = x, n = f_2 = y - x$$

– 相应的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$p(xy) = p(x)p(y/x)$$

$$p(xy) = p(xn)\left|J\right| = p(xn) = p(x)p(n)$$

– 如果噪声N是均值m=0、方差$\sigma^2=P_N$的(白色)高斯加性噪声AWGN，信道为高斯加性信道，简称高斯信道。

三、高斯信道及信道容量一续

➢2、高斯信道的信道容量

$$
\begin{aligned}
h(Y/X) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y/x)\mathrm{lb}p(y/x)dxdy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(n)\mathrm{lb}p(n)dxdn \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} p(n)\mathrm{lb}p(n)dn \\
&= h(N) = \frac{1}{2}\mathrm{lb}(2\pi e\sigma^2) = \frac{1}{2}\mathrm{lb}(2\pi eP_N)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\left\{h(Y) - h(Y/X)\right\} \\
&= \max_{p(x)} h(Y) - h(N) \\
&= \max_{p(x)} h(Y) - \tfrac{1}{2}\mathrm{lb}(2\pi eP_N)
\end{aligned}
$$

三、高斯信道及信道容量—续

➢2、高斯信道的信道容量—续

- X和N相互独立时，信源X取均值m=0、方差$\sigma_X^2 = P_X$ 的高斯分布，信宿Y也满足高斯分布，其均值m=0、方差为

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma^2 = P_X + P_N$$

- 根据平均功率受限下的最大微分熵定理，当信宿Y取均值m=0、方差$\sigma_Y^2 = P_X + P_N$的高斯分布时具有最大微分熵

$$\max_{p(x)} h(Y) = \frac{1}{2}\text{lb}(2\pi e\sigma_Y^2) = \frac{1}{2}\text{lb}[2\pi e(P_X + P_N)]$$

- 高斯信道的信道容量(其中 P_X / P_N 为信噪功率比SNR)

$$C = \frac{1}{2}\text{lb}[2\pi e(P_X + P_N)] - \frac{1}{2}\text{lb}(2\pi eP_N) = \frac{1}{2}\text{lb}(1 + \frac{P_X}{P_N})$$

$$\boxed{C = W\text{lb}\left(1 + \text{SNR}\right)?}$$

三、高斯信道及信道容量一续

3、高斯信道的最大信息传输速率

- 当所传输信号的有效带宽为B时，根据采样定理，只要采样频率取为2B，符号序列即可保留时间连续消息的全部信息
- 平均不失真传输一条消息(符号)所需时间为T=1/(2B)，相应最大信息传输速率

$$C_t = C/T = 2B \cdot C = B\mathrm{lb}\left(1 + P_X / P_N\right)$$

该式称为香农公式

- 另一方面，通常AWGN噪声常用噪声功率谱密度表示，如设 $N_0 = P_N / B$ 为AWGN的单边功率谱密度，则上式为：

$$C_t = B\mathrm{lb}\left(1 + P_X / P_N\right) = B\mathrm{lb}\left[1 + P_X / \left(BN_0\right)\right]$$

三、高斯信道及信道容量—续

3、高斯信道的最大信息传输速率—续

– 香农公式的意义：

$$\lim_{B\to\infty} C_t = \mathrm{lb}e\cdot\left[P_X/N_0\right]\cdot\ln e = \mathrm{lb}e\cdot\left[P_X/N_0\right]$$

- *当 $\mathrm{SNR} = P_X/P_N$ 固定时，最大信息传输速率与所传输信号的有效带宽成正比*
- *最大信息传输速率与信噪功率比基本呈对数关系，且信噪功率比小于1时最大信息传输速率仍大于0*
- *最大信息传输速率一定时，增大所传输信号的有效带宽，可以降低对信噪功率比的要求，反之亦然*
- *当所传输信号的有效带宽趋于无穷时，最大信息传输速率趋于有限值(背景噪声是不可消除的，且功率谱密度近似为一个可由噪声温度表示的常量—在雷达领域通常有噪声温度的提法正是此意。)*

$$C_t = B\mathrm{lb}\left(1+P_X/P_N\right) = B\mathrm{lb}e\cdot\ln\left(1+P_X/P_N\right) = \mathrm{lb}e\cdot\ln\left(1+P_X/\left(BN_0\right)\right)^B$$

$$= \mathrm{lb}e\cdot\left[P_X/N_0\right]\cdot\ln\left(1+\frac{P_X/N_0}{B}\right)^{\frac{B}{P_X/N_0}}$$

例1

$$\begin{bmatrix} i \\ \lg i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0.3010 & 0.4771 & 0.6021 & 0.6990 & 0.7782 & 0.8451 & 0.9031 & 0.9542 \end{bmatrix}$$

- 已知高斯信道所传输信号的带宽B=3kHz，最大信息传输速率C_t=1.5×10^4bps，求信噪功率比；如果将信噪功率比降低到-3dB，求保持同样最大信息传输速率所需的带宽。
  - 已知速率和带宽，求信噪比功率

$$C_t = B\,\mathrm{lb}\left(1 + P_X / P_N\right) = 3\times10^3\,\mathrm{lb}\left(1 + P_X / P_N\right) = 1.5\times10^4$$
$$\Rightarrow \mathrm{lb}\left(1 + P_X / P_N\right) = 15/3 = 5 \Rightarrow P_X / P_N = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$
$$\Rightarrow 10\lg\left(P_X / P_N\right) = 10\lg 31 = 14.9(\mathrm{dB})$$

  - 已知速率和信噪比，求所需带宽

$$10\lg\left(P_X / P_N\right) = -3 \Rightarrow \lg\left(P_X / P_N\right) = -0.3 \Rightarrow P_X / P_N = 10^{-0.3} \approx 0.5$$
$$\Rightarrow C_t = B\,\mathrm{lb}\left(1 + P_X / P_N\right) = B\,\mathrm{lb}(1 + 0.5) = 1.5\times10^4$$
$$\Rightarrow B = 1.5\times10^4 / \mathrm{lb}1.5 \approx 1.5\times10^4 / 0.585 \approx 25.6(\mathrm{kHz})$$

本章小结

- 连续信源没有一般意义下的最大微分熵，只有限制条件下的最大微分熵。
  - 不具有非负性，但严格上凸
- 虽然微分熵不能作为信息度量，但平均互信息是熵差，具有信息度量的意义。
  - 平均互信息具有非负性、对称性和严格凸性
    - ***信道固定时，I(X;Y)是信源概率密度函数的严格上凸函数***
    - ***信源固定时，I(X;Y)是信道转移概率密度函数的严格下凸函数***

本章小结

- 香农公式表明
  - 最大信息传输速率与所传输信号的有效带宽成正比
  - 最大信息传输速率与信噪功率比基本呈对数关系，且噪声功率大于信号功率仍能传输信息
  - 最大信息传输速率一定时，增大所传输信号的有效带宽，可以降低对信噪功率比的要求，反之亦然
  - 当所传输信号的有效带宽趋于无穷时，最大信息传输速率趋于有限值

关于信息量单位的转换

- 信息量 $I(x_i) = -\log_a P(x_i)$

  無量綱。但為表述方便，自信息量的单位由对数的底a决定
  - a=２时，单位为比特；
  - a=ｅ时，单位为奈特；
  - a=10.时，单位为哈特。

$$I(x_i) = \begin{cases} -\text{lb } P(x_i) & \text{比特} \\ -\lg P(x_i) & \text{哈特} \\ -\ln P(x_i) & \text{奈特} \end{cases}$$

$$\text{lb}B\text{比特} = \frac{\ln B}{\ln 2}\text{比特} = \ln B\text{奈特}$$

$$\ln N\text{奈特} = \frac{\text{lb}N}{\text{lb}e}\text{奈特} = \text{lb}N\text{比特}$$

- 均匀分布

$$h(X) = \text{lb}(b-a)\text{比特} = \ln(b-a)\text{奈特}$$

- 高斯分布

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\text{lb}p(x)dx = \tfrac{1}{2}\text{lb}(2\pi e\sigma^2)\text{比特}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ln p(x)dx = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2)\text{奈特}$$

- 指数分布

$$h(X)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\text{lb}\left(\tfrac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}\right)dx$$

$$= \text{lb}m\int_0^{\infty} p(x)dx + \text{lb}e\int_0^{\infty} p(x)\tfrac{x}{m}dx = \text{lb}(em)\text{比特}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ln\left(\tfrac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}\right)dx$$

$$= \ln m\int_0^{\infty} p(x)dx + \ln e\int_0^{\infty} p(x)\tfrac{x}{m}dx = \ln(em)\text{奈特}$$

关于雅可比行列式

- 设有n个自变量的n个函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

定义在区域D^n上，并有连续偏导数，则偏导数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

称为函数组(1)的函数行列式或雅可比式。

简记为：

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

- 函数行列式可作为面积(体积)的伸缩系数
- 假定函数

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

在xy平面的某个区域上连续,并且有连续的偏导数,又假定在这个区域上

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

则

$$dudv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dxdy$$

关于雅可比行列式-续

➢ 例2:直角坐标与球面坐标的变换

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \quad (1) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

的函数行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta$$

于是:

$$dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} drd\theta d\varphi = -r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$